Tilting Komplexe

Thorsten Bonato

Universität Heidelberg

Heidelberg, 8. Oktober 2007

Überblick

1. Kontext
2. Begriffe und Grundlagen
   - Polytopale Komplexe und Unterteilungen
   - Tilting Funktionen
   - Polar und konjugierte Seitenfläche
3. Tilting Komplexe
   - Konstruktion
   - Eigenschaften
   - Ergebnisse

Überblick

STSP(n) und GTSP(n)

Wir betrachten das Symmetrische Traveling Salesman Problem auf n Städten, die alle paarweise miteinander verbunden sind. Wir arbeiten also auf dem vollständigen Graphen $K_n = (V_n, E_n)$.

Definition

- Das Symmetric Traveling Salesman Polytope STSP(n) ist definiert als die konvexe Hülle aller charakteristischen Vektoren von Rundreisen, die jede Stadt genau einmal besuchen.
- Das Graphical Traveling Salesman Polyhedron GTSP(n) ist analog definiert, jedoch dürfen hierbei die Städte auch mehrfach besucht werden.

Naddef und Rinaldi (1993)

- Facettendefinierende Ungleichungen des GTSP(n) zerfallen in drei Klassen:
  (i) Triviale Ungleichungen: $\boldsymbol{\chi}_e^T \boldsymbol{x} \geq 0, \forall\, e \in E_n$,
  (ii) Gradungleichungen: $\boldsymbol{\chi}_{\delta(u)}^T \boldsymbol{x} \geq 2, \forall\, u \in V_n$,
  (iii) Ungleichungen in sog. Tight-Triangular- oder TT-Form.
- STSP(n) ist eine Seitenfläche des GTSP(n) bestimmt durch den Schnitt der Gradfacetten.
- Jede nicht-triviale Facette des STSP(n) induziert eine Facette des GTSP(n).
- Offene Frage: Ist der Schnitt einer GTSP(n)-Facette mit STSP(n) automatisch eine Facette von STSP(n)???

Was bedeutet TT-Form?

Eine Ungleichung $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \geq \alpha$ ist in TT-Form, falls

- $\boldsymbol{a}$ auf allen Dreiecken der Δ-Ungleichung genügt,
- für jeden Knoten u mindestens eine Kante $e \not\ni u$ existiert, so daß auf dem dadurch definierten Dreieck die Δ-Ungleichung mit Gleichheit erfüllt ist.

Was bedeutet TT-Form?

Eine Ungleichung $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq \alpha$ ist in TT-Form, falls

- $\boldsymbol{a}$ auf allen Dreiecken der Δ-Ungleichung genügt,
- für jeden Knoten u mindestens eine Kante $e \not\ni u$ existiert, so daß auf dem dadurch definierten Dreieck die Δ-Ungleichung mit Gleichheit erfüllt ist.

Oswald, Reinelt und Theis (2005)

- Klasse der TT-Facetten zerfällt in zwei Subklassen:
  - (i) NR-Facetten, die sich auf STSP(n) übertragen lassen,
  - (ii) nicht-NR-Facetten.
- Subklasse der nicht-NR-Facetten ist nicht leer für $n \geq 9$.
- Tilting Komplexe erlauben Aussagen über die lokale Struktur der TT-Facetten.

Überblick

Polytopaler Komplex

Definition

Ein polytopaler Komplex $\mathcal{C} := \{P_i\}_{i \in I}$ ist eine endliche Menge von Polytopen mit folgenden Eigenschaften:

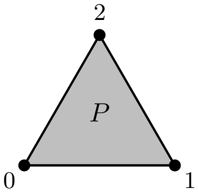
- Mit P_i sind auch alle Seitenflächen von P_i im Komplex.
- Der Schnitt zweier Polytope P_i, P_j des Komplexes muß eine Seitenfläche beider Polytope sein.

Definition

Ein polytopaler Komplex $\mathcal{C} := \{P_i\}_{i \in I}$ ist eine endliche Menge von Polytopen mit folgenden Eigenschaften:

- Mit P_i sind auch alle Seitenflächen von P_i im Komplex.
- Der Schnitt zweier Polytope P_i, P_j des Komplexes muß eine Seitenfläche beider Polytope sein.

Beispiel



$$\mathcal{C}(P) \;:= \{\, \emptyset, 0, 1, 2, 01, 02, 12, P \,\}$$

$$\mathcal{C}(\partial P) := \mathcal{C}(P) \setminus \{P\} \quad \text{(Randkomplex)}$$

Unterteilung

Definition

Eine Unterteilung eines Polytops $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist ein polytopaler Komplex $\mathcal{C}$ mit $P = \bigcup_{Q \in \mathcal{C}} Q$.

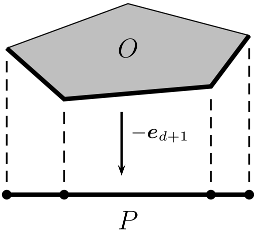
Sie heißt regulär, falls $\mathcal{C}$ aus der kanonischen Projektion der unteren Seitenflächen eines Polytops $O \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ hervorgeht.

Definition

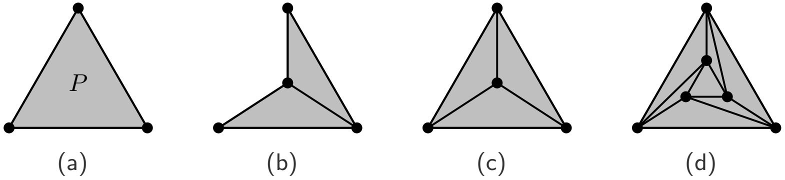
Eine Unterteilung eines Polytops $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist ein polytopaler Komplex $\mathcal{C}$ mit $P = \bigcup_{Q \in \mathcal{C}} Q$.

Sie heißt regulär, falls $\mathcal{C}$ aus der kanonischen Projektion der unteren Seitenflächen eines Polytops $O \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ hervorgeht.

Beispiel



Die Begriffe nochmal im Überblick



(a) Polytop P
(b) Polytopaler Komplex aber keine Unterteilung von P
(c) Reguläre Unterteilung von P
(d) Nicht-reguläre Unterteilung von P

Inputs

- eine sog. gute Seitenfläche $F \subsetneq \mathsf{STSP}(n)$, die nicht in einer Nichtnegativitätsfacette enthalten ist.
- die definierenden Ungleichungen $\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} \geq \alpha_j$, $j = 0, \ldots, k$, aller NR-Facetten, deren Schnitt mit $\mathsf{STSP}(n)$ F enthält.

Inputs

- eine sog. gute Seitenfläche $F \subsetneq \mathrm{STSP}(n)$, die nicht in einer Nichtnegativitätsfacette enthalten ist.
- die definierenden Ungleichungen $\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} \geq \alpha_j$, $j = 0, \ldots, k$, aller NR-Facetten, deren Schnitt mit STSP(n) F enthält.

Definition

Für $u \in V_n$ definiere

$$\lambda_u \colon \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{\mu} \longmapsto \min_{(v,w) \in E_n \setminus \delta(u)} \sum_{j=0}^{k} \mu_j \left(a_j^{uv} + a_j^{uw} - a_j^{vw} \right)$$

Eigenschaften der Tilting Funktionen

Tilting Funktionen sind stückweise linear und konkav.

Eigenschaften der Tilting Funktionen

Tilting Funktionen sind stückweise linear und konkav.

Lemma

Jede stückweise lineare und konvexe Funktion f über einem Polytop P definiert eine reguläre Unterteilung von P durch die kanonische Projektion der unteren Seitenflächen des Polytops

$$Q := \operatorname{conv}\left\{ \left(\boldsymbol{x}^T, f(\boldsymbol{x})\right) \mid \boldsymbol{x} \in P \right\} = \operatorname{conv}\left(G_{f_{|P}}\right).$$

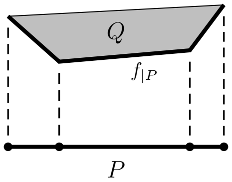
Tilting Funktionen sind stückweise linear und konkav.

Lemma

Jede stückweise lineare und konvexe Funktion f über einem Polytop P definiert eine reguläre Unterteilung von P durch die kanonische Projektion der unteren Seitenflächen des Polytops

$$Q := \operatorname{conv}\left\{ \left(\boldsymbol{x}^T, f(\boldsymbol{x})\right) \mid \boldsymbol{x} \in P \right\} = \operatorname{conv}\left(G_{f_{|P}}\right).$$

Beispiel



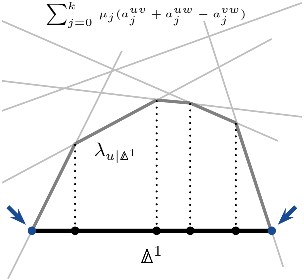
Folgerung

- $-\lambda_{u\,|\mathbb{\Delta}^k}$ definiert eine reguläre Unterteilung des k-dimensionalen Standardsimplex $\mathbb{\Delta}^k := \operatorname{conv}\{\, e_0, \ldots, e_k \,\}$.
- diese Unterteilung wird mit $\mathcal{C}_u$ bezeichnet.

Folgerung

- $-\lambda_{u\,|\Delta^k}$ definiert eine reguläre Unterteilung des k-dimensionalen Standardsimplex $\Delta^k := \operatorname{conv}\{\, \boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_k \,\}$.
- diese Unterteilung wird mit $\mathcal{C}_u$ bezeichnet.

Beispiel



Überblick

Polar

Definition

Zu einem Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist das Polar P^Δ definiert durch

$$P^\Delta := \{\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in P \,\}.$$

Polar

Definition

Zu einem Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist das Polar P^Δ definiert durch

$$P^\Delta := \{\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in P \,\}.$$

Eigenschaften

- Das Polar besteht anschaulich aus den Vektoren der Lhs-Koeffizienten aller normierten für P zulässigen Ungleichungen.

Definition

Zu einem Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist das Polar P^Δ definiert durch

$$P^\Delta := \{\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in P \,\}.$$

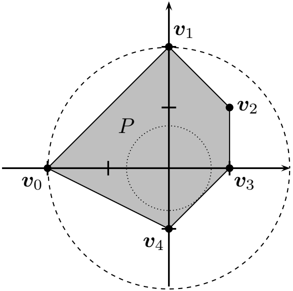
Eigenschaften

- Das Polar besteht anschaulich aus den Vektoren der Lhs-Koeffizienten aller normierten für P zulässigen Ungleichungen.
- Ist P ein volldimensionales Polytop mit $\mathbf{0} \in \text{relint}(P)$, so übertragen sich diese Eigenschaften auf P^Δ und es gilt

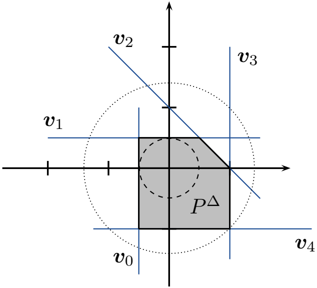
$$P^\Delta = \{\, \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{v} \leq 1, \forall\, \boldsymbol{v} \in \text{vert}(P) \,\}.$$

D.h. man kann P^Δ nur anhand der Ecken von P beschreiben.

Beispiel wechselseitig polarer Polytope



(a) Ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^2$



(b) Das Polar zu P

Beachte

Es gilt stets, daß $\mathbf{0} \in P^\Delta$ und $\mathbf{0} \in P^{\Delta\Delta}$. Somit kann $P = P^{\Delta\Delta}$ nur gelten, falls $\mathbf{0} \in P$.

Definition

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein volldimensionales Polytop mit $\mathbf{0} \in \operatorname{relint}(P)$. Für alle Seitenflächen F von P ist die konjugierte Seitenfläche $F^\diamond$ definiert durch

$$F^\diamond := \{\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in P \ \text{ und } \\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in F \,\}.$$

Definition

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein volldimensionales Polytop mit $\mathbf{0} \in \operatorname{relint}(P)$. Für alle Seitenflächen F von P ist die konjugierte Seitenfläche $F^\diamond$ definiert durch

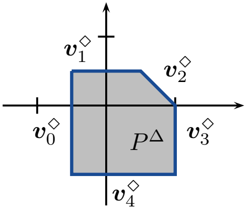
$$\begin{aligned} F^\diamond := \{\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq 1,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in P \ \text{ und} \\ \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = 1,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in F \,\}. \end{aligned}$$

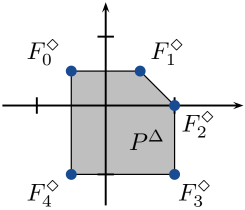
Eigenschaften

- $F^\diamond$ ist eine Seitenfläche von P^Δ.
- $\dim\bigl(F^\diamond\bigr) = \operatorname{codim}(F) - 1 = \dim(P) - \dim(F) - 1$.

Wir betrachten nun die konjugierten Seitenflächen für die Ecken $\boldsymbol{v}_i$ bzw. die Kanten $F_i := \{\, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{(i+1) \bmod 5} \,\}$ von P. ▸ P

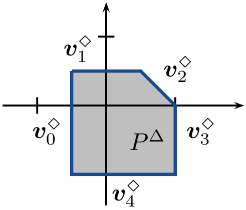
Beispiel konjugierter Seitenflächen

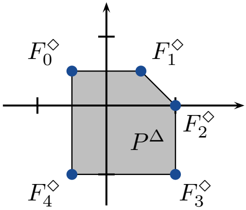




Wir betrachten nun die konjugierten Seitenflächen für die Ecken $\boldsymbol{v}_i$ bzw. die Kanten $F_i := \{ \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{(i+1) \bmod 5} \}$ von P. ▸ P

Beispiel konjugierter Seitenflächen





Beobachtung

Die Seitenverbände von P und P^Δ – also die teilweise geordneten Mengen der jeweiligen Seitenflächen mit der Inklusion als partieller Ordnung – verhalten sich anti-isomorph zueinander.

Worin besteht nun der Zusammenhang ...

Worin besteht nun der Zusammenhang ...

... zu Tilting Komplexen?

Ein Tilting Komplex $\mathcal{T}_u$ am Knoten u ist eine Unterteilung der zu einer guten Seitenfläche F konjugierten Seitenfläche $F^\diamond$. Der zugehörige Tilting Komplex $\mathcal{T}$ ist definiert durch

$$\mathcal{T} := \bigcap_{u \in V_n} \mathcal{T}_u.$$

Worin besteht nun der Zusammenhang ...

... zu Tilting Komplexen?

Ein Tilting Komplex $\mathcal{T}_u$ am Knoten u ist eine Unterteilung der zu einer guten Seitenfläche F konjugierten Seitenfläche $F^\diamond$. Der zugehörige Tilting Komplex $\mathcal{T}$ ist definiert durch

$$\mathcal{T} := \bigcap_{u \in V_n} \mathcal{T}_u.$$

... zur Unterteilung $\mathcal{C}_u$?

Eine reguläre Unterteilung $\mathcal{C}_u$ des Standardsimplex läßt sich durch geeignete Projektion in $\mathcal{T}_u$ überführen.

Problem

Die Definition der konjugierten Seitenfläche setzt ein volldimensionales Polytop P mit $\mathbf{0} \in \text{relint}(P)$ voraus. Wir möchten jedoch Seitenflächen von STSP(n) betrachten, welches keine dieser Voraussetzungen erfüllt.

Problem

Die Definition der konjugierten Seitenfläche setzt ein volldimensionales Polytop P mit $\mathbf{0} \in \mathrm{relint}(P)$ voraus. Wir möchten jedoch Seitenflächen von STSP(n) betrachten, welches keine dieser Voraussetzungen erfüllt.

Lösung

Wir translatieren STSP(n) derart, daß ein beliebiger relativ innerer Punkt, z.B. $\boldsymbol{x}^* := \frac{2}{n-1} \cdot \mathbb{1}$, auf den Ursprung abgebildet wird. Anschließend projizieren wir das verschobene Polytop auf dessen affine Hülle. Dabei werden die zulässigen Ungleichungen ebenfalls transformiert und zwar in die sog. Standardskalierung (bzgl. $\boldsymbol{x}^*$).

Gibt es Fragen zu den Grundlagen?

Überblick

Ein Beispiel

Wir betrachten die nicht-NR-Facette von GTSP(10), die durch folgende Ungleichung definiert ist

$$\begin{array}{llllllllll}
3x_1 & +\ 5x_2 & +\ 6x_3 & +\ 6x_4 & +\ 7x_5 & +\ 8x_6 & +\ 9x_7 & +\ 9x_8 & +\ 9x_9 & +\ 8x_{10} \\
+\ 9x_{11} & +\ 9x_{12} & +\ 6x_{13} & +\ 5x_{14} & +\ 6x_{15} & +\ 8x_{16} & +\ 8x_{17} & +\ 9x_{18} & +\ 9x_{19} & +\ 8x_{20} \\
+\ 3x_{21} & +\ 8x_{22} & +\ 6x_{23} & +\ 6x_{24} & +\ 6x_{25} & +\ 6x_{26} & +\ 6x_{27} & +\ 9x_{28} & +\ 3x_{29} & +\ 9x_{30} \\
+\ 9x_{31} & +\ 6x_{32} & +\ 3x_{33} & +\ 9x_{34} & +\ 6x_{35} & +\ 9x_{36} & +\ 6x_{37} & +\ 9x_{38} & +\ 3x_{39} & +\ 9x_{40} \\
+\ 9x_{41} & +\ 7x_{42} & +\ 9x_{43} & +\ 9x_{44} & +\ 6x_{45} & \geq 47. & & & &
\end{array}$$

Ihr Schnitt mit STSP(10) liefert eine gute Seitenfläche F mit codim$(F) = 3$. Diese ist in drei NR-Facetten enthalten

$$\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} \geq \alpha_j \, , \, j = 0, 1, 2.$$

Es gilt also $k = 2$.

Beachte

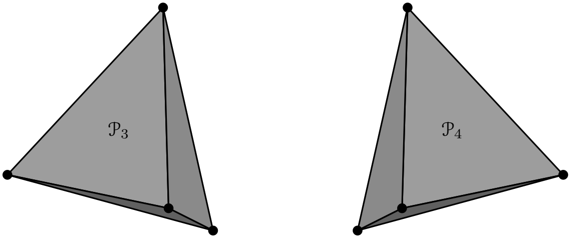
Die Übereinstimmung von codim(F) mit der Anzahl der NR-Facetten, die F enthalten, ist reiner Zufall!

Ein Beispiel

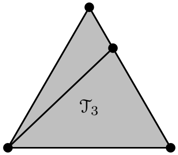
- Für alle $u \in V_{10} \setminus \{3,4\}$ gilt $\lambda_{u\,|\mathbb{A}^2} \equiv 0$. Diese können ignoriert werden.

Ein Beispiel

- Für alle $u \in V_{10} \setminus \{3,4\}$ gilt $\lambda_{u\,|\Delta^2} \equiv 0$. Diese können ignoriert werden.
- Interessant sind also die Tilting Funktionen $\lambda_{u\,|\Delta^2}$, für $u = 3, 4$. Durch $\operatorname{conv}(G_{\lambda_{u\,|\Delta^2}})$ ergeben sich die Polytope $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$. Diese definieren die regulären Unterteilungen $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$.

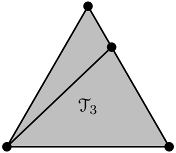


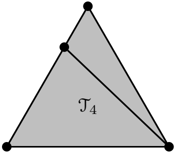
- Mittels geeigneter Projektion werden die Unterteilungen $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ auf die Tilting Komplexe $\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ an den entsprechenden Knoten abgebildet.



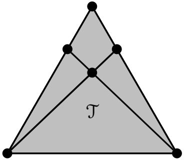
Ein Beispiel

- Mittels geeigneter Projektion werden die Unterteilungen $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ auf die Tilting Komplexe $\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ an den entsprechenden Knoten abgebildet.



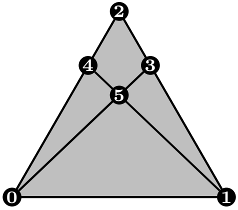


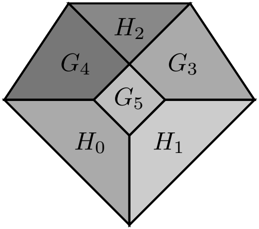
- Der Schnitt der Komplexe $\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ ergibt schließlich den Tilting Komplex $\mathcal{T}$.



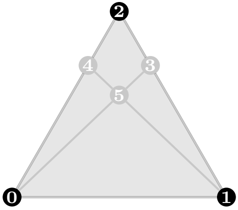
Überblick

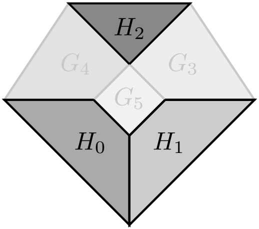
Eigenschaften des Tilting Komplexes (Beispiel)





- Die Ecken $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_5$ des Tilting Komplexes korrespondieren zu den TT-Facetten von GTSP(10), deren Schnitt mit STSP(10) die gute Seitenfläche F enthält.
- Die Adjazenzbeziehungen der Ecken übertragen sich direkt auf die zugehörigen TT-Facetten.



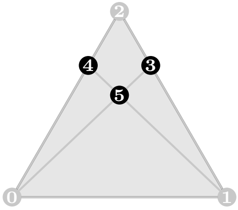


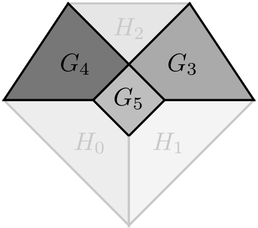
Die Ecken der konjugierten Seitenfläche $F^\diamond$ korrespondieren zu den drei NR-Facetten

$$\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} \geq \alpha_j \,,\; j = 0, 1, 2,$$

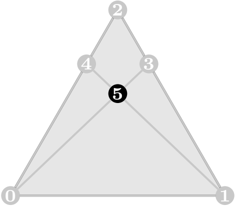
die als Input für die Berechnung von $\mathcal{T}$ dienten. Folglich lassen sich diese mittels der bereits vorgestellten äußeren Beschreibung von $F^\diamond$ aus den Ecken von STSP(n) berechnen. $F^\diamond$

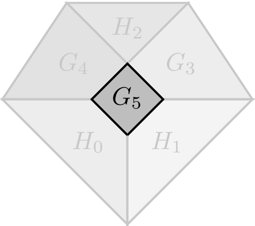
Eigenschaften des Tilting Komplexes (Beispiel)





- Die übrigen Ecken des Tilting Komplexes repräsentieren die nicht-NR-Facetten.
- In Standardskalierung erhält man diese als Konvexkombination der NR-Facetten. Die Koeffizienten sind dabei identisch zu den baryzentrischen Koordinaten der entsprechenden Ecke von $\mathcal{T}$ bezüglich der Ecken von $F^{\diamond}$.

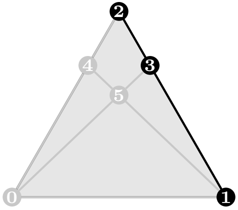


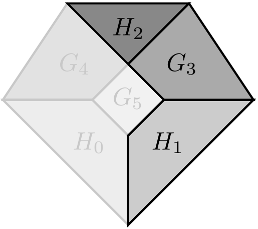


Ecken des Komplexes, die im relativen Inneren liegen, liefern nicht-NR-Facetten, deren Schnitt mit STSP(10) gleich F ist, d.h. also

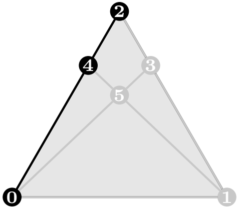
$$F = G_5 \cap \mathsf{STSP}(10).$$

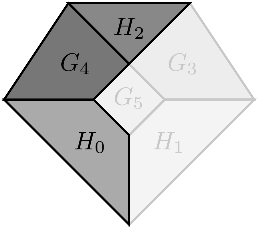
Eigenschaften des Tilting Komplexes (Beispiel)





Der Teilkomplex der Ecken $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ entspricht dem eindimensionalen Tilting Komplex einer guten Seitenfläche $\hat{F}$ mit $\operatorname{codim}(\hat{F}) = 2$, die F enthält.





Der Teilkomplex der Ecken $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ entspricht ebenfalls diesem Tilting Komplex von $\hat{F}$, allerdings modulo Knotenpermutation. Die zugehörige Permutation lautet

$$\pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 3 & 9 & 0 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Überblick

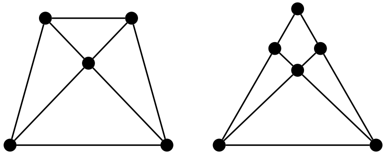
Ergebnisse für GTSP(10)

- Bisher wurden nur ein- und zweidimensionale Tilting Komplexe gefunden im Verhältnis $221:6$.

Ergebnisse für GTSP(10)

- Bisher wurden nur ein- und zweidimensionale Tilting Komplexe gefunden im Verhältnis $221 : 6$.
- Die eindimensionalen Komplexe besitzen genau eine relativ innere Ecke.

- Bisher wurden nur ein- und zweidimensionale Tilting Komplexe gefunden im Verhältnis 221 : 6.
- Die eindimensionalen Komplexe besitzen genau eine relativ innere Ecke.
- Bei den zweidimensionalen Komplexen gibt es zwei verschiedene Grundformen:

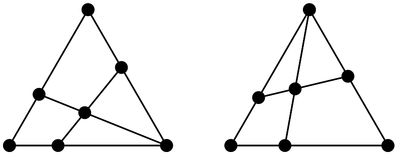


Sie weisen einen hohen Grad an Symmetrie auf.

Ergebnisse für GTSP(12)

- Auch hier wurden bisher nur ein- und zweidimensionale Tilting Komplexe gefunden in einem Verhältnis von $1653:2$.

- Auch hier wurden bisher nur ein- und zweidimensionale Tilting Komplexe gefunden in einem Verhältnis von $1653:2$.
- Die zwei zweidimensionalen Komplexe sehen wie folgt aus:



Sie verfügen nicht über die Symmetrie der zweidimensionalen Komplexe von GTSP(10).

Ich bedanke mich für ihr Interesse und ihre Aufmerksamkeit!

Gibt es abschließende Fragen?