Schlag auf Schlag

Was hat Michelangelos berühmte Skulptur des David mit moderner Elektronik zu tun? Und wie kann man mit Hammer und Meißel Kurzschlüsse verhindern? Finden Sie es heraus!

Geht es Ihnen auch so? Elektronische Begleiter wie Laptop und Handy sind aus dem Alltag kaum noch wegzudenken. Wie diese Dinge hergestellt werden, ist meist uninteressant. Doch bei der Produktion treten zahlreiche Probleme auf, deren Lösung sich auf den Preis und die Qualität des fertigen Produkts auswirkt. Und da wird die Sache schon interessanter, oder?

Eines dieser Probleme betrifft die in fast jedem Elektrogerät enthaltene Leiterplatine. Auf ihr werden elektronische Bauteile montiert und durch dünne Bahnen aus elektrisch leitendem Material verbunden. Diverse Restriktionen, wie zum Beispiel Größe und Befestigungsmöglichkeiten der Komponenten sowie einzuhaltende Mindestabstände, legen das „Layout“, also die Anordnung der Bauteile und Leiterbahnen auf der Platine, größtenteils fest. Ein solches Layout ähnelt einem schematischen Liniennetzplan des öffentlichen Nahverkehrs. So wie sich auf dem Plan zwei Linien überschneiden können, gibt es auch im Layout sich kreuzenden Leiterbahnen. Aber jede solche Kreuzung führt zu einem Kurzschluss im fertigen Produkt. Um das zu verhindern, besitzen Platinen mehrere voneinander isolierte Lagen. Im einfachsten Fall sind das Ober- und Unterseite der Platine. Eine Leiterbahn kann durch spezielle Bohrlöcher, genannt Vias, von einer Lage zur anderen wechseln, um Kreuzungen mit anderen Bahnen zu umgehen. Jedes Via erhöht aber die Produktionskosten. Zu viele Vias verringern zudem die Stabilität der Platine. Kann man eventuell ganz ohne Bohrungen auskommen? Falls nicht, wie kann man mit möglichst wenigen Vias sämtliche Kurzschlüsse vermeiden?

Zur Beantwortung dieser Fragen reduziert man das Problem auf seine wesentlichen Eigenschaften. Was sind die relevanten Elemente und wie stehen sie zueinander in Beziehung? Kritisch sind jene Punkte, an denen sich zwei Leiterbahnen kreuzen. Jede Bahn kann mehrere solcher Punkte besitzen. Zwischen den Punkten gibt es zwei Arten der Beziehung. Erstens, zwei Punkte können in Konflikt stehen, also einen Kurzschluss bilden. Oder zweitens, sie können „benachbart“ sein. Benachbarte Punkte liegen auf derselben Bahn und man kann der Bahn folgend vom einen zum anderen gelangen, ohne auf eine weitere Kreuzung zu treffen. Das heißt, falls benachbarte Punkte verschiedenen Lagen zugewiesen werden, ist auf dem Weg zwischen den Punkten ein Via nötig. Zu guter Letzt erachtet man Punkte, die weder benachbart sind noch in Konflikt stehen, als voneinander unabhängig. Diese Reduktion auf das Wesentliche heißt Abstraktion. Sie hat den Vorteil, dass man die Struktur des Problems erfasst und es eventuell auf vertrautere Fragestellungen zurückführen kann. Zum Beispiel könnte man sich die Punkte als Personen vorstellen. In Konflikt stehende Personen sind Feinde, benachbarte Personen sind Freunde und voneinander unabhängige Personen stehen sich neutral gegenüber. In diesem Kontext entspräche das Via-Problem der Aufgabe, die Personen auf zwei Räume zu verteilen und dabei alle Feinde aber gleichzeitig so wenige Freunde wie möglich voneinander zu trennen. Eine solche Aufteilung in zwei Gruppen nennt man Partition.

Wie bestimmt man nun eine bestmögliche Partition? Simples Ausprobieren aller Möglichkeiten ist in der Praxis zum Scheitern verurteilt. Für zehn Personen gibt es zwar nur 512 mögliche Aufteilungen, bei hundert Personen reden wir aber bereits über eine Eins mit 29 Nullen! Selbst mit dem schnellsten derzeit verfügbaren Computer würde ich das Ergebnis nicht mehr erleben. Man muss also geschickter vorgehen. Dazu verwenden Mathematiker das sogenannte „Partitionspolytop“. Es ist ein vielflächiges Objekt, das vage an einen

Diamanten mit hochkomplexem Facettenschliff erinnert. Die zentrale Eigenschaft dieses Polytops ist, dass jede seiner Ecken eine der möglichen Partitionen repräsentiert. Zugegeben, der Vergleich mit dem Diamanten hinkt etwas. Das Partitionspolytop kann wesentlich mehr als drei Dimensionen haben. Tatsächlich hat es genau so viele Dimensionen wie es Feind- und Freundschaften zwischen den aufzuteilenden Personen gibt. Der Einfachheit halber bleiben wir aber im dreidimensionalen Raum. Diesen kann man sich besser vorstellen. Das weitere Vorgehen ist in höheren Dimensionen im Prinzip identisch.

Wie hilft uns das Partitionspolytop bei der Lösung unseres Problems? Mittels eines Optimierungsverfahrens namens Simplexmethode, kann man sich geschickt von Ecke zu Ecke hangeln, bis man eine optimale Partition erreicht. Dazu muss man aber die gesamte Oberfläche des Polytops kennen. Leider ist sie extrem komplex und bislang nur dann vollständig bekannt, wenn weniger als acht Personen aufzuteilen sind. Man muss sich also mit einer Näherung begnügen, in etwa so, als sei der Diamant von einem Steinklotz umschlossen. Doch Vorsicht! Jetzt läuft man die Ecken des Klotzes ab und erhält eventuell eine falsche Lösung. So wie Michelangelo laut Zitat lediglich den überflüssigen Marmor entfernen musste, um die berühmte Statue des David zu erschaffen, muss man beim Diamanten erst durch gezielte Meißelschläge die relevanten Teile seiner Oberfläche freilegen. Dabei ist die Kunst, den Ansatzpunkt und -winkel des Meißels stets so zu wählen, dass ein Schlag möglichst viel Stein entfernt, ohne den Diamanten zu beschädigen. Anders als das reale Gegenstück hat der mathematische Meißel eine beliebig scharfe und unendlich breite Klinge. So erhält man absolut plane Schnittflächen. Und nun kommt der Clou. Man kann jeden Meißelschlag bestimmen, ohne die komplette Diamantenoberfläche zu kennen! Vor jedem Schlag befragt man die Simplexmethode, welche Ecke des grob behauenen Klotzes man als nächstes abtrennen muss. Sobald der vorgeschlagene Punkt mit einer Ecke des Diamanten übereinstimmt, ist das Problem gelöst.

Mathematiker bezeichnen die Meißelschläge als Schnittebenen. Die gesamte Methode heißt Schnittebenenverfahren. In meiner Arbeit habe ich einen neuen Ansatz zur Bestimmung dieser Schnittebenen untersucht. Er erlaubt es, geschickt auf bereits bekannte Verfahren zurückzugreifen. Wie schon erwähnt, besitzt das Partitionspolytop eine Dimension pro Feind- und Freundschaft zwischen den aufzuteilenden Personen. Die maximale Dimension für eine festgelegte Anzahl von Personen erhält man also, falls jede Person zu allen anderen in Beziehung steht. Ein solches Beziehungsnetzwerk heißt „vollständig“. Für diesen Fall gibt es zahlreiche Wege, um Schnittebenen zu erzeugen. Beim Via-Problem sieht die Sache jedoch anders aus. Dort hat jede Person maximal einen Feind und zwei Freunde. Daher sind die meisten Methoden für vollständige Netzwerke nicht direkt anwendbar. Genau hier setzt mein Beitrag an. Zunächst verdichte ich das Netzwerk, indem ich ausgewählte Personenpaare zusammenfasse. Dabei verwende ich die Simplexmethode zur Vorhersage, ob ein Paar in einer optimalen Aufteilung demselben Raum zugewiesen wird. Falls ja, ersetze ich es durch eine einzelne neue Person. Diese neue Person besitzt die kombinierten Beziehungen des Paares, aus dem sie entstanden ist. Doch oft erhält man selbst mit dieser Technik am Ende kein vollständiges Netzwerk. In diesen Fällen füge ich die fehlenden Beziehungen künstlich hinzu und erhalte somit ein Partitionspolytop maximaler Dimension. Nun kann ich mit Hilfe der bekannten Methoden Schnittebenen bestimmen, die ich anschließend durch eine Technik namens „Projektion“ auf das ursprüngliche Partitionspolytop übertrage. Das Ganze kann man sich etwa so vorstellen: Angenommen man soll aus einem Blatt Papier ein Quadrat ausschneiden, hat aber keine passende Schablone parat. Stattdessen hat man eine Taschenlampe und eine Zuschnittmaschine, die Würfel aus Holzklötzen sägen kann. Das Quadrat steht für das ursprüngliche Partitionspolytop. Durch Hinzufügen einer fehlenden Beziehung erhöht man seine Dimension. Anstatt des Quadrats muss man nun also einen Würfel ausschneiden. Dafür steht die Zuschnittmaschine bereit. Sie repräsentiert die bekannten Methoden, um Schnittebenen für vollständige

Netzwerke zu bestimmen. Hält man den fertigen Würfel im richtigen Winkel in den Schein der Taschenlampe, so nimmt der Schatten die Form eines Quadrats an. Diese Projektion des Würfels auf das Blatt Papier ersetzt somit die fehlende Schablone zum Ausschneiden des Quadrats.

In zahlreichen Experimenten konnte ich zeigen, dass meine Methode bei schwach vernetzter Beziehungsstruktur das Bestimmen einer optimalen Partition teilweise um das Zwanzigfache beschleunigt. Musste man früher zum Beispiel einen ganzen Tag auf das Ergebnis warten, dauert es nun weniger als anderthalb Stunden. Das Fantastische daran ist, dass man außer dem Via-Problem noch viele weitere wichtige Anwendungen auf das Partitionsproblem zurückführen kann. So könnte mein Ansatz zum Beispiel die Lösung von Problemen in der Epilepsieforschung, beim Management von Aktienportfolios oder bei der Vergabe von Mobilfunkfrequenzen beschleunigen. Kaum zu glauben, dass ein Meißel ein so vielseitiges Werkzeug sein kann. Oder hätten Sie's gedacht?